Serie 10

1. Trennungseigenschaften

Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T})$ hat die Trennungseigenschaft T_1 (und heisst T_1 Raum), wenn es für alle $x, y \in E$ mit $x \neq y$ eine offene Menge gibt welche y, aber nicht x enthält. Zeigen Sie:

a) Jeder Hausdorffraum hat die Trennungseigenschaft T_1.

b) Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T})$ hat genau dann die T_1 Eigenschaft wenn $\{x\}$ in $(E, \mathcal{T})$ abgeschlossen ist für alle $x \in E$.

c) Jeder zusammenhängende normale T_1 Raum mit mindestens zwei Punkten ist überabzählbar.

2. Trennungseigenschaften von metrischen Räumen

a) Sei (E, d) ein metrischer Raum und $A \subset E$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $d(\cdot, A) : E \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

stetig ist und dass für alle $x \notin A$, $d(x, A) > 0$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

b) *Urysohn Lemma in metrischen Räumen.* Sei (E, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset E$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : E \to [0, 1]$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

wohldefiniert und stetig ist. Beweisen Sie weiter, dass $f = 0$ auf A und $f = 1$ auf B.

c) Zeigen Sie dass in metrischen Räumen einpunktige Mengen abgeschlossen sind.

d) Beweisen Sie, dass metrische Räume normal, regulär und Hausdorff sind.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

3. Urysohn Lemma (lokal kompakte Version)

Zeigen Sie:

> Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter Hausdorffraum ist und $K \subset U \subset E$ wobei K kompakt und U offen, dann existiert $f \in C(E, [0, 1])$ so dass $f = 1$ auf K und $f = 0$ ausserhalb einer kompakten Teilmenge von U.